MATE 2000+ Standard

Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Şcoală: ....

....

EDITURA PARALELA 45 EDUCAȚIONAL

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Iuliana Ene, Ionuţ Burcioiu
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Matematică : Algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Gabriel Popa, Dorel Luchian, Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea. - Piteşti : Paralela 45, 2020
ISBN 978-973-47-3287-6

I. Popa, Gabriel
II. Luchian, Dorel
III. Zanoschi, Adrian
IV. Iurea, Gheorghe

51

Gabriel POPA
Dorel LUCHIAN
Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VIII-a

mate 2000 – standard

ÎNVĂȚARE STANDARD ®
aprofundare

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Seria „Mate 2000+ Standard”, adresată elevilor de clasa a VII-a şi de clasa a VIII-a, a apărut din necesitatea sistematizării şi a interpretării creative şi aplicative a noţiunilor din noua programă de studiu, în scopul armonizării practicii şcolare cu setul de competenţe impus de programă şi cu specificul subiectelor de examen. Prin ea se urmăreşte trecerea de la formarea noţiunilor şi a deprinderilor elementare de operare cu acestea la dezvoltarea raţionamentului matematic riguros.

Autorii au modelat conceptele şi noţiunile abstracte fireşti domeniului astfel încât elevul să vadă şi să exerseze aplicaţiile practice ale matematicii, fiind pus permanent în situaţia de a adapta aparatul teoretic la necesităţile şi la provocările vieţii de zi cu zi. Învăţarea devine, prin această deschidere către realitatea concretă, plăcută şi necesară.

Fiecare volum începe cu recapitularea materiei din clasa anterioară, dublată de testele iniţiale elaborate în acord cu gradul de dificultate al Evaluării Naţionale. Capitolele sunt împărţite în lecţii care pot fi parcurse în 1-3 ore şi se încheie, fiecare, cu câte trei teste sumative ce oferă o imagine fidelă a nivelului de pregătire la care se află, etapă cu etapă, elevii. Lecţiile încep cu o expunere detaliată şi temeinică a părţii teoretice, fapt care asigură o anumită autonomie a lucrării faţă de alte auxiliare didactice. Urmează un număr de probleme reprezentative pentru tematica lecţiei, însoţite de rezolvări punctuale, care se constituie în modele de redactare a răspunsurilor. Problemele propuse sunt gândite gradual, atât ca dificultate, cât şi din punct de vedere metodic, încât profesorul să le adapteze în mod nuanţat ritmului de pregătire al elevilor. Ele respectă, totodată, pragurile de dificultate specifice subiectelor de la Evaluarea Naţională, iar cele care depăşesc acest nivel – puţine la număr - sunt semnalate prin asterisc. Toate problemele au, la finalul culegerii, răspunsuri sau soluţii. În plus, volumul pentru clasa a VIII-a are, în ultima parte, teme recapitulative din materia claselor V-VII, gândite în spiritul subiectelor de Evaluare Naţională.

Sperăm că lucrările din seria „Mate 2000+ Standard” vor aduce bucuria învăţării pentru elevii cărora se adresează, iar colegii noştri profesori vor găsi în ele instrumente utile pentru îndrumarea copiilor. Succes tuturor!

Autorii

CAPITOLUL I
INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAŢII ÎN $\mathbb{R}$

I.1. Mulţimi definite cu ajutorul unei proprietăţi comune elementelor lor

Dacă, pentru o mulţime M, putem identifica o anumită proprietate p pe care toate elementele mulţimii o verifică şi niciun element care nu aparţine mulţimii nu o verifică (numită **proprietate caracteristică** a mulţimii M), vom nota mulţimea M astfel:

$$M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: „M este mulţimea acelor x care au proprietatea p".

Probleme rezolvate

1. Scrieţi, prin enumerarea elementelor, următoarele mulţimi:

$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *paralelipiped*$\}$; $B = \{a \mid a$ este cifră, $\overline{12a} \vdots 3\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 < x \leq 3\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = -5\}$.

Soluţie: $A = \{$a, e, i$\}$; $B = \{0, 3, 6, 9\}$; $C = \{-1, 1, 2, 3\}$; $D = \{(-5, 1); (-1, 5); (1, -5); (5, -1)\}$.

2. Fie mulţimea $A = \{8, 12, 20, 27, 30, 45, 106\}$. Determinaţi mulţimile:

$$B = \{x \in A \mid x \vdots 4\};\ C = \{x \in A \mid x \vdots 9\};\ D = \{x \in A \mid x \vdots 2 \text{ şi } x \not\vdots\ 4\}.$$

Soluţie: $B = \{8, 12, 20\}$; $C = \{27, 45\}$; $D = \{30, 106\}$.

3. Considerăm, în plan, un sistem ortogonal de axe xOy şi notăm cu (x_P, y_P) coordonatele unui punct P. Reprezentaţi geometric mulţimile:

a) $A = \{P \mid x_P = 0\}$; b) $B = \{P \mid y_P = 1\}$; c) $C = \{P \mid x_P < 0\}$.

Soluţie: a) Elementele mulţimii A sunt acele puncte care au abscisa egală cu 0, adică toate punctele axei Oy (figura 1).

b) Elementele mulţimii B sunt acele puncte care au ordonata egală cu 1, adică punctele unei drepte paralele cu axa Ox, care conţine punctul $M(0, 1)$ (figura 2).

c) Elementele mulţimii C sunt acele puncte care au abscisa negativă şi ordonata neprecizată, adică toate punctele semiplanului deschis cu frontiera Oy, situat în stânga axei Oy (figura 3).

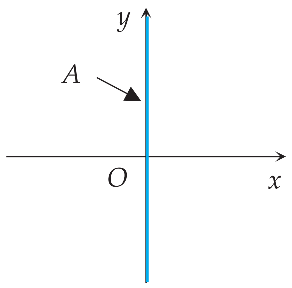


Figura 1

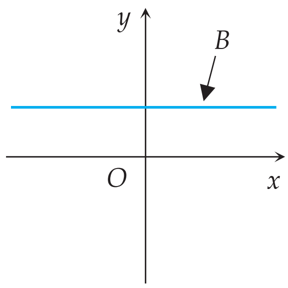


Figura 2

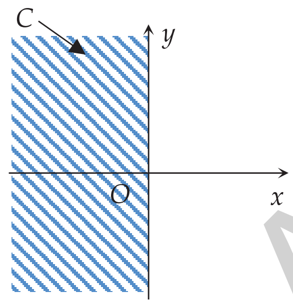


Figura 3

4. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 32 - 3p, p \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că $A = B$.

Soluţie: Vom demonstra că $A \subset B$ şi $B \subset A$. Fie $x \in A$, adică $x = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $x = 32 + 3k - 30 = 32 - 3(10 - k)$. Notând $10 - k = p \in \mathbb{Z}$, obţinem că $x = 32 - 3p$, deci $x \in B$ şi deducem că $A \subset B$. Reciproc: Dacă $x \in B$, rezultă că $x = 32 - 3p = 3(10 - p) + 2 = 3k + 2$, unde $k = 10 - p \in \mathbb{Z}$. Astfel, $x \in A$ şi am arătat că $B \subset A$, ceea ce încheie demonstraţia.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieţi, prin enumerarea elementelor, următoarele mulţimi:
$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *mulţime*$\}$; $B = \{x \mid x$ este cifră impară$\}$;
$C = \{x \mid x$ este cifră a bazei 2$\}$; $D = \{x \mid x$ este număr prim de o cifră$\}$.

2. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A = \{x \mid \overline{2x5} \,\vdots\, 3\}$; b) $B = \{x \mid \overline{x32} \,\vdots\, 2\}$;
c) $C = \{x \mid \overline{xx72} \,\vdots\, 9\}$; d) $D = \{x \mid \overline{12x} \,\vdots\, 4\}$.

3. Fie mulţimile $A = \{-2, 1, 7\}$ şi $B = \{0, 1\}$. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$; b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$;
c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$; d) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ şi $y \in B\}$.

4. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x < 15\}$; b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \mid 2\}$;
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, |x| < 2\}$; d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x - 1 \le 3\}$.

5. Scrieţi cu ajutorul unei proprietăţi caracteristice următoarele mulţimi:
a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$;
c) $C = \{1, 2, 4, 8\}$; d) $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$.

6. Se consideră mulţimile $A = \{x \mid x = 4k + 2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Scrieţi câte trei elemente din fiecare mulţime.
b) Stabiliţi dacă numerele 200, 201 şi 202 aparţin celor două mulţimi.
c) Arătaţi că $A \subset B$ şi $B \not\subset A$.

7. Se consideră mulţimile $A = \{x \mid x = 3k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x = 3k + 2,\ k \in \mathbb{N}\}$.

a) Stabiliţi dacă numerele 2018, 2019 şi 2020 aparţin celor trei mulţimi.
b) Determinaţi $A \cap B$.
c) Determinaţi $A \cup B \cup C$.

8. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 7\}$;
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 2\}$;
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + y = 1 \text{ şi } x - 2y = 5\}$.

9. Determinaţi cardinalul fiecăreia dintre următoarele mulţimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 25\}$;
c) $C = \{\overline{abc} \mid a + c = 2\}$;
d) $D = \{\overline{xy} \mid x > y\}$.

10. Se consideră mulţimea $M = \left\{0; -\frac{6}{2}; -\sqrt{2\frac{1}{4}}; \pi; 3\sqrt{2}; 0,(2)\right\}$. Determinaţi mulţimile:

a) $A = \{x \in M \mid x \geq 0\}$;
b) $B = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$;
c) $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$;
d) $D = \{x \in M \mid x \geq y,\ \forall\, y \in M\}$.

11. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{4}{x} \in \mathbb{N}\right\}$;
b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;
c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{9}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$;
d) $D = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2x-3}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

12. Fie mulţimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \leq 9\}$. Determinaţi elementele mulţimilor A, B, C şi D, unde: $A = \{x \in M \mid |x| = x\}$, $B = \{x \in M \mid |x| = -x\}$, $C = \{x \in M \mid |x| \leq 2\}$, $D = \{x \in M \mid |x| \geq 4\}$.

13. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 201 - 2p,\ p \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că $A = B$.

14. Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC, determinaţi următoarele mulţimi:

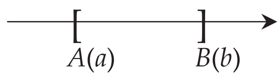
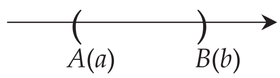
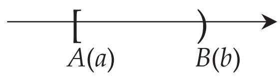
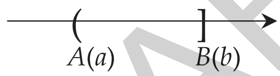
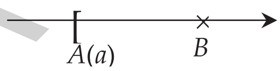
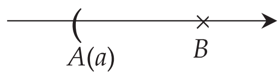
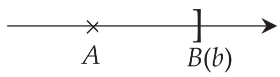
a) $P = \{M \mid M \in BC,\ BM = MC\}$;
b) $Q = \{M \mid MA = MB = MC\}$;
c) $R = \{M \mid MA = MB\}$;
d) $S = \{M \mid \mathrm{d}(M, AB) = \mathrm{d}(M, BC) = \mathrm{d}(M, AC)\}$.

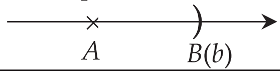
15. Reprezentaţi, în raport cu un reper cartezian xOy, următoarele mulţimi de puncte din plan:

a) $B_1 = \{M \mid x_M = y_M\}$;
b) $B_1 = \{M \mid x_M = -y_M\}$;
c) $C = \{M \mid x_M = y_M;\ -1 \leq x_M \leq 1\}$.

I.2. Intervale

Un **interval** este o submulţime a mulţimii numerelor reale care, odată cu două valori reale a şi b, conţine toate numerele reale cuprinse între a şi b.

Definiţie şi notaţie	Reprezentare geometrică	Caracterizare
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	Segmentul închis $[AB]$ 	Intervalul închis, mărginit, având capetele a şi b. Există un cel mai mic şi un cel mai mare element în acest interval.
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	Segmentul deschis (AB) 	Intervalul deschis, mărginit, având capetele a şi b. Nu există un cel mai mic şi un cel mai mare element în acest interval.
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	Segmentul semiînchis $[AB)$ 	Intervalul mărginit, închis la stânga, deschis la dreapta, având capetele a şi b. Există un cel mai mic element, dar nu există un cel mai mare element în acest interval.
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	Segmentul semiînchis $(AB]$ 	Intervalul mărginit, deschis la stânga, închis la dreapta, având capetele a şi b. Există un cel mai mare element, dar nu există un cel mai mic element în acest interval.
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	Semidreapta închisă cu originea în punctul A, care conţine punctul B, $[AB$ 	Interval mărginit la stânga şi nemărginit la dreapta, având capătul din stânga a. Există un cel mai mic element, dar nu există un cel mai mare element în acest interval.
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	Semidreapta deschisă cu originea în punctul A, care conţine punctul B, $(AB$ 	Interval mărginit la stânga şi nemărginit la dreapta, având capătul din stânga a. Nu există un cel mai mic şi un cel mai mare element în acest interval.
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	Semidreapta închisă cu originea în punctul B, care conţine punctul A, $AB]$ 	Interval mărginit la dreapta şi nemărginit la stânga, având capătul din dreapta b. Există un cel mai mare element, dar nu există un cel mai mic element în acest interval.

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	Semidreapta deschisă cu originea în punctul B, care conține punctul B, AB) 	Interval mărginit la dreapta şi nemărginit la stânga, având capătul din dreapta b. Nu există un cel mai mare şi un cel mai mic element în acest interval.
$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$	Axa numerelor, numită şi dreapta reală 	Interval nemărginit la ambele capete. Nu există un cel mai mare şi un cel mai mic element în mulțimea $\mathbb{R}$.

Operațiile cu intervale sunt operații uzuale cu mulțimi:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ – reuniunea;

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$ – intersecția;

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$ – diferența.

Este indicat să se utilizeze reprezentarea geometrică atunci când se efectuează operații cu intervale.

PROBLEME REZOLVATE

1. Pe o cutie de lapte este menționat conținutul: 1000 ml ± 3%. Exprimați, cu ajutorul intervalelor, între ce valori se situează volumul de lapte din cutie.

Soluție: Deoarece $\frac{3}{100} \cdot 1000 = 30$ ml, volumul de lapte din cutie se situează în intervalul [970 ml, 1030 ml].

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

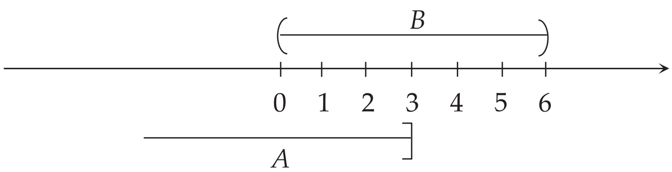
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq 9\}$,

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 \leq 11\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| < 6\}$.

Soluție: $A = (-2, 5]$. Dacă $x - 1 \geq 9$, rezultă că $x \geq 10$, iar $B = [10, \infty)$. Dacă $2x - 3 \leq 11$, rezultă că $x \leq 7$, iar $C = (-\infty, 7]$. Utilizând proprietățile modulului, avem că $-6 < x - 4 < 6$, deci $D = (-2, 10)$.

3. Determinați $A \cup B$ şi $A \cap B$, dacă $A = (-\infty, 3]$, iar $B = (0, 6)$.

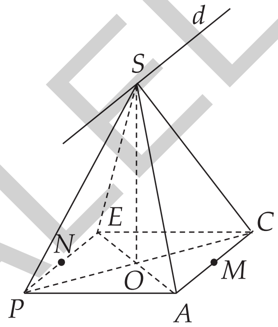
Soluție: Ținând cont de definițiile operațiilor cu mulțimi şi de reprezentarea geometrică a celor două mulțimi obținem că $A \cup B = (-\infty, 6)$ şi $A \cap B = (0, 3]$.



CAPITOLUL V
ARII ŞI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

V.1. CALCULUL UNOR DISTANŢE ŞI A UNOR MĂSURI DE UNGHIURI ÎN CORPURILE STUDIATE

PROBLEME REZOLVATE



1. Piramida patrulateră regulată $SPACE$ are toate muchiile de lungime a, $a > 0$.

a) Aflaţi măsura unghiului format de dreapta SP cu planul (SAE).

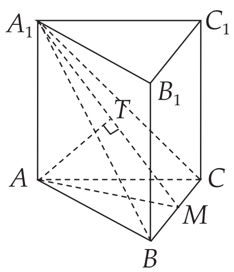
b) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul (SPE).

c) Determinaţi sinusul unghiului format de planele (SAC) şi (SPE).

Soluţie: a) Deoarece $pr_{(SAE)} PS = OS$, rezultă că $\sphericalangle(SP, (SAE)) = \sphericalangle PSO$, unde O este centrul bazei. Întrucât $PACE$ este pătrat, rezultă că $PO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi atunci, din triunghiul POS, $\sphericalangle O = 90°$, obţinem că măsura unghiului PSO este egală cu 45°.

b) Fie M, N mijloacele segmentelor AC, respectiv PE. Avem $AC \parallel (SPE)$, deci $d(A, (SPE)) = d(M, (SPE))$. Construim $MQ \perp SN$, $Q \in SN$. Ţinând cont că $PE \perp SN$ şi $PE \perp MN$, rezultă că $PE \perp (SMN)$, deci $PE \perp MQ$. Aşadar, $MQ \perp SN$, $MQ \perp PE$, deci $MQ \perp (SPE)$, iar $d(M, (SPE)) = MQ$. Din triunghiul SMN va rezulta $\frac{MN \cdot SO}{2} = \frac{MQ \cdot SN}{2}$, deci $MQ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

c) Fie $d = (SPE) \cap (SAC)$. Deoarece $AC \parallel PE$, rezultă că $d \parallel AC \parallel PE$. Întrucât triunghiurile SAC şi SPE sunt echilaterale, rezultă că $SM \perp AC$, $SN \perp PE$, deci unghiul dintre planele (SAC) şi (SPE) este unghiul MSN. Din triunghiul MSN, exprimând aria în două moduri, vom obţine că $\sin(\sphericalangle MSN) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



2. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ având $AB = 6$ cm şi $AA_1 = 6\sqrt{3}$ cm.

a) Aflaţi distanţa de la punctul A_1 la dreapta BC.

b) Aflaţi distanţa de la punctul A la planul (A_1BC).

c) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele AB_1 şi CC_1.

Soluție: a) Fie M mijlocul laturii BC. Cum $AA_1 \perp (ABC)$, BC este inclusă în planul (ABC) şi $AM \perp BC$, rezultă că $A_1M \perp BC$, deci $d(A_1, BC) = A_1M$. Din triunghiul A_1AM, $\sphericalangle A_1AM =$ $= 90°$ rezultă, conform teoremei lui Pitagora, că $A_1A = 3\sqrt{15}$ cm.

b) Construim $AT \perp A_1M$, $T \in A_1M$. Întrucât $AT \perp A_1M$, $A_1M \perp BC$ şi $BC \perp AM$, vom obţine, conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare că $AT \perp (A_1BC)$, deci $d(A, (A_1BC)) = AT$. Exprimând în două moduri aria triunghiului A_1AM, obţinem $AT =$ $= \dfrac{AA_1 \cdot AM}{A_1M} = \dfrac{6\sqrt{15}}{5}$ cm.

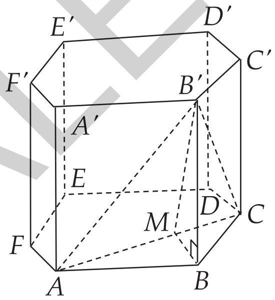
c) Cum $CC_1 \parallel BB_1$, deducem că $\sphericalangle(AB_1, CC_1) = \sphericalangle(AB_1, BB_1) = \sphericalangle AB_1B$. Din triunghiul ABB_1, $\sphericalangle ABB_1 = 90°$, se obţine că $\sphericalangle AB_1B = 30°$.

3. În figura alăturată este reprezentată prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ în care $AB = AA' = 2$ cm.

a) Aflaţi lungimea segmentului AC'.

b) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele $E'D'$ şi AC.

c) Aflaţi tangenta unghiului diedru format de planele $(B'AC)$ şi (ABC).



Soluție: a) Întrucât $CC' \perp (ABC)$ şi $AC \subset (ABC)$, rezultă că $CC' \perp AC$, deci triunghiul ACC' are $\sphericalangle C = 90°$. Conform teoremei lui Pitagora, $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 16$ cm, deci $AC' = 4$ cm.

b) Deoarece $AB \parallel E'D'$, rezultă că $\sphericalangle(E'D', AC) = \sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle BAC$. Din triunghiul ABC, cu $AB = BC = 2$ cm şi $\sphericalangle ABC = 120°$, rezultă că $\sphericalangle BAC = 30°$.

c) Fie M mijlocul segmentului AC. Întrucât $AB = BC$ şi $AM = MC$, rezultă că $BM \perp AC$. Cum $B'A = B'C$ şi $AM = MC$, rezultă că $B'M \perp AC$. Ţinând cont că $(B'AC) \cap (ABC) =$ $= AC$, $BM \perp AC$, $BM \subset (ABC)$, $B'M \perp AC$, $B'M \subset (B'AC)$, deducem că $\sphericalangle((B'AC), (ABC)) =$ $= \sphericalangle B'MB$. Din triunghiul $B'BM$, $\sphericalangle B = 90°$, obţinem $\text{tg}(\sphericalangle B'MB) = 2$.

PROBLEME PROPUSE

1. În figura 1, $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată în care $AB = 2\sqrt{3}$ cm şi $AA' = 2$ cm. Fie M punctul de intersecţie a dreptelor $A'C'$ şi $B'D'$ şi N punctul de intersecţie a dreptelor AD' şi DA'.

a) Aflaţi lungimea segmentului MN.

b) Găsiţi măsura unghiului format de dreptele MN şi $D'C$.

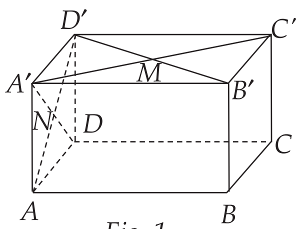


Fig. 1

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată în care $AB = 24$ cm, iar măsura unghiului dintre dreapta AC' şi planul (BCC') este egală cu 30°.

a) Aflaţi distanţa de la punctul D' la dreapta AC.

b) Determinaţi distanţa de la punctul D la planul (ACD').

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată în care $AB = 2\sqrt{6}$ cm, iar măsura unghiului diedru format de planele $(A'BC)$ şi (ABC) este de $30°$.

a) Aflaţi distanţa de la centrul bazei $ABCD$ la dreapta AC'.

b) Determinaţi măsura unghiului dintre planele (ABB') şi (BDB').

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată în care $AB = 2AA' = 48$ cm.

a) Arătaţi că tangenta unghiului format de dreapta AC' cu planul (ABB') este egală cu $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Aflaţi măsura unghiului determinat de planele $(A'BC)$ şi (ABC).

5. În figura 2, $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară având $AA' = 12$ cm, suma ariilor feţelor laterale egală cu 216 cm^2, iar punctele M şi M' sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv $A'B'$.

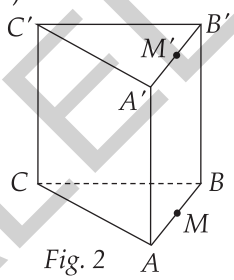


Fig. 2

a) Demonstraţi că sinusul unghiului format de dreapta AC' cu planul (CMM') este egală cu $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

b) Calculaţi distanţa de la punctul B' la dreapta AC.

6. Se consideră o prismă hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ în care $AB = AA' = 6$ cm.

a) Găsiţi distanţa de la punctul A' la dreapta CD.

b) Determinaţi măsura unghiului diedru format de planele $(A'CD)$ şi (ABC).

7. Suma lungimilor muchiilor unui cub este 72 cm.

a) Aflaţi lungimea diagonalei cubului.

b) Aflaţi distanţa de la punctul A' la planul (DBB').

8. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub în care aria patrulaterului ABC_1D_1 este $16\sqrt{2}$ cm^2.

a) Aflaţi perimetrul triunghiului AB_1C.

b) Determinaţi măsura unghiului diedru format de planele (ABC) şi (CB_1A_1).

c) Găsiţi măsura unghiului format de dreapta AB_1 cu planul (BDD_1).

9. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic în care $AB = 2\sqrt{6}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm şi $BB' = 4$ cm. Aflaţi distanţa de la punctul A la dreapta $B'C$.

10. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 8$ cm, $BC = 8\sqrt{3}$ cm şi $A'C = 20$ cm.

a) Determinaţi distanţa de la punctul B' la dreapta AD.

b) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul $(A'BD)$.

11. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V, $VA = 4$ cm şi măsura unghiului dintre dreapta VA şi planul (ABC) egală cu $60°$.

a) Determinaţi aria bazei.

b) Aflaţi măsura unghiului diedru determinat de planele (VAC) şi (VBD).

CUPRINS