

Marius Perianu
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VI-a

I



Algebră

I. Mulțimi

I.1.	Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale	8
I.2.	Relații între mulțimi. Submulțimi	13
	Teste de evaluare	17
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	19
I.3.	Operații cu mulțimi	21
I.4.	Mulțimi finite și mulțimi infinite	26
	Teste de evaluare	29
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	31
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Mulțimi)	33
I.5.	Probleme cu caracter practic	36
I.6.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	38

II. Divizibilitatea numerelor naturale

II.1.	Divizibilitatea numerelor naturale (recapitulare)	44
II.2.	Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	49
II.3.	Divizori comuni. Determinarea c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere naturale	52
II.4.	Multipli comuni. Determinarea c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere naturale	57
II.5.	Proprietăți ale relației de divizibilitate în \mathbb{N}	61
	Teste de evaluare	65
	Fișă pentru portofoliul individual (A3)	67
	Fișă pentru portofoliul individual (A4)	69
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Numere naturale)	71
II.6.	Probleme cu caracter practic	73
II.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	75

III. Rapoarte și proporții

III.1.	Rapoarte	80
III.2.	Procente	85
III.3.	Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor	92
III.4.	Proporții derivate. Șir de rapoarte egale	98
	Teste de evaluare	103
	Fișă pentru portofoliul individual (A5)	105
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Rapoarte și proporții)	107
III.5.	Mărimi direct proporționale	109
III.6.	Mărimi invers proporționale	113
III.7.	Regula de trei simplă	117
III.8.	Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice	122
III.9.	Probabilități	127
	Teste de evaluare	131
	Fișă pentru portofoliul individual (A6)	133
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Proporționalitate)	135
III.10.	Probleme cu caracter practic	137

Geometrie

IV. Noțiuni geometrice fundamentale

IV.1.	Unghiul. Clasificarea unghiurilor (recapitulare)	142
IV.2.	Unghiuri adiacente. Biseectoarea unui unghi	148
IV.3.	Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare	152
IV.4.	Unghiuri opuse la vârf	156
IV.5.	Unghiuri în jurul unui punct	160
	Teste de evaluare	163
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	165
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Unghiul)	167
IV.6.	Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism	169
IV.7.	Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă	174
	Teste de evaluare	180
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	181
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Paralelism)	183
IV.8.	Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	185
	Teste de evaluare	188
IV.9.	Probleme cu caracter practic	189
IV.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	191

V. Triunghiul

V.1.	Triunghiul. Elementele triunghiului. Clasificarea triunghiurilor	194
V.2.	Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	199
V.3.	Construcția triunghiurilor	202
V.4.	Congruența triunghiurilor	206
V.5.	Metoda triunghiurilor congruente	210
V.6.	Congruența triunghiurilor dreptunghice	215
	Teste de evaluare	217
	Fișă pentru portofoliul individual (G3)	219
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Triunghiul)	221
V.7.	Probleme cu caracter practic	223
V.8.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	225

VI. Variante de subiecte pentru teză

Varianta 1	228
Varianta 2	229
Varianta 3	230
Varianta 4	231
Varianta 5	232

Soluții	233
---------	-----

Competențe generale și specifice

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- 1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în \mathbb{N}
- 1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale
- 1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
- 1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional
- 1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date
- 1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- 2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10ⁿ, 3 și 9 în \mathbb{N}
- 2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date
- 2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor
- 2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x + a = b$, $x + a = b$, unde a , b și c sunt numere raționale
- 2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte
- 2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- 3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.
- 3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale
- 3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi
- 3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale
- 3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice
- 3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- 4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în \mathbb{N}
- 4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
- 4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi
- 4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale
- 4.5. Exprimarea, prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic, a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc
- 4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- 5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în \mathbb{N}
- 5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date
- 5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi
- 5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale
- 5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc
- 5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

- 6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în \mathbb{N}
- 6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
- 6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului
- 6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale
- 6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc
- 6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

Algebră

8	I.1	Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale
13	I.2	Relații între mulțimi. Submulțimi
17		Teste de evaluare
19		Fișă pentru portofoliul individual (A1)
21	I.3	Operații cu mulțimi
26	I.4	Mulțimi finite și mulțimi infinite
29		Teste de evaluare
31		Fișă pentru portofoliul individual (A2)
33		Test-model pentru Evaluarea Națională
36	I.5	Probleme cu caracter practic
38	I.6	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

I

Mulțimi



I.1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

O *mulțime* este o grupare de obiecte, simboluri etc., bine precizate și distincte, numite *elementele* mulțimii.

Mulțimile se notează de regulă cu litere mari: A, B, M, N, \dots , iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

Mulțimea numerelor naturale

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale se numește *mulțimea numerelor naturale*. Se notează $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Mulțimea numerelor naturale nenule

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale mai puțin 0 se numește *mulțimea numerelor naturale nenule*. Se notează $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Relații între element și mulțime

Dacă M este o mulțime și x este un element al mulțimii M , se spune că *elementul x aparține mulțimii M* (pe scurt *x aparține lui M*) și se notează $x \in M$.

Dacă x nu este element al mulțimii M , se spune că *x nu aparține mulțimii M* și se notează $x \notin M$.

Exemplu: Dacă $M = \{1, 2, 3\}$, avem $1 \in M, 2 \in M$ și $3 \in M$, dar $0 \notin M, 5 \notin M$.

Mulțimea vidă. Mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează \emptyset (de exemplu mulțimea elefanților de pe Lună).

Moduri de definire a mulțimilor

1 Enunțând o proprietate comună a elementelor acelei mulțimi.

Exemple: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \cdot x + 3 \leq 18\}$, $B = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$.

2 Prin enumerarea tuturor elementelor ei între acolade.

Exemple: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$.

3 Prin enumerarea tuturor elementelor în interiorul unei linii curbe închise (numită diagrama Venn-Euler).

Exemple:



Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimile cu un număr finit (limitat) de elemente se numesc *mulțimi finite*.

Mulțimile care nu au un număr finit de elemente (spunem că au un număr infinit de elemente) se numesc *mulțimi infinite*.

Exemple:

- 1** Mulțimea cifrelor din sistemul zecimal este finită.
- 2** Mulțimea oamenilor de pe globul pământesc este finită.
- 3** Mulțimea numerelor naturale este infinită.
- 4** Mulțimea numerelor naturale divizibile cu 7 este infinită.

Cardinalul unei mulțimi finite este numărul elementelor mulțimii. Cardinalul mulțimii finite M este un număr natural care se notează $\text{card } M$.

Observație. Notăm cardinalul unei mulțimi infinite cu simbolul \aleph , pe care îl citim *infinite*. (\aleph nu este număr natural).

Exemple:

1 Mulțimea $M = \{2, 5, 7, 8\}$ are 4 elemente și scriem: $\text{card } M = 4$.

2 $\text{card } \mathbb{N}^* = \aleph$.

Exersare



- Scrieți, prin enumerare și sub formă de diagramă, mulțimile literelor folosite în scrierea cuvintelor: *capacitate, matematică, perspicacitate, paralelipiped*.
- Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ și $C = \{3, 5, 7, 9\}$. Pentru fiecare dintre elementele $0, 1, 2, 5, 6, 7$, scrieți cărei mulțimi aparțin și căreia nu.
- Este corect scrisă mulțimea $A = \{1 + 2, 2 + 3, 4 + 1, 7, 13\}$? Justificați.
- Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a $2 \in \{x \mid x \text{ divide } 16\}$; b $7 \in \{x \mid 2 \leq x < 7\}$; c $21 \notin \{x \mid x = \overline{21c}\}$;
d $4^2 \in \{x \mid 2^3 < x < 2^5\}$; e $543 \in \{x \mid x : 5\}$; f $10^3 \notin \{x \mid x \text{ se divide cu } 10\}$.
- Determinați valoarea numărului natural x pentru care numărul natural 2 este element al mulțimii $A = \{2 \cdot x + 1, 2 \cdot x + 2, 2 \cdot x + 3\}$.
- Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele:
a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$; d $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 11 \leq x < 23\}$;
b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 9\}$; e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 18 \text{ se împarte exact la } x\}$;
c $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 7 < x \leq 14\}$; f $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ impar}, x < 13\}$.
Reprezentați cele 6 mulțimi utilizând diagrame Venn-Euler.
- a Scrieți mulțimea numerelor naturale pare mai mici decât 14.
b Scrieți mulțimea numerelor naturale impare mai mici decât 11.
c Scrieți mulțimea numerelor naturale pare, de două cifre, divizibile cu 5.
d Scrieți mulțimea numerelor naturale, mai mici decât 123, divizibile cu 25.
e Scrieți mulțimea numerelor naturale de trei cifre, cu toate cifrele egale.
- Fie mulțimile $A = \{2, 7, 11, 20\}$, $B = \{x \mid x \text{ este predecesor al lui } m, \text{ unde } m \in A\}$, și $C = \{x \mid x \text{ este succesor al lui } m, \text{ unde } m \in A\}$. Scrieți prin enumerare, apoi utilizând diagrame Venn-Euler elementele mulțimilor B și C .
- Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite:
 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 11\}$; $B = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \cdot y + 1 \geq 37\}$;
 $C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 2^n < 2^{10}\}$; $D = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ și } 5^m + 3 > 130\}$.
- Scrieți mulțimea A știind că are trei elemente și folosind informațiile următoare:
 $7 \notin A, 5 \notin A, 4 \notin A, 2 \notin A, 1 \notin A, 0 \in A, 8 \notin A, 6 \notin A$.



- 33** Numerele naturale impare consecutive sunt grupate astfel: $\{1\}$, $\{3, 5\}$, $\{7, 9, 11\}$, $\{13, 15, 17, 19\}$, ... etc. Determinați suma numerelor din a 8-a mulțime.
- 34** Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$. Aflați $\text{card}\{x \in A \mid x : 2 \text{ sau } x : 5\}$.
- 35** Se dă șirul de mulțimi $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,
- Scriveți elementele mulțimii A_4 .
 - Determinați mulțimea ce conține numărul natural 2010.
 - Determinați cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii A_{2010} .
- 36** Fie mulțimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$. Arătați că printre oricare 9 elemente ale lui A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Probleme de șapte stele



- 37** Se dă mulțimea A , formată din numere naturale, cu proprietățile:
- dacă $x \in A$, atunci $5 \cdot x + 1 \in A$;
 - dacă $7 \cdot x + 4 \in A$, atunci $x \in A$;
 - $9 \in A$.
- Arătați că numărul 6 aparține mulțimii A .
- 38** Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan următoarele proprietăți:
- mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ este formată din toate elementele mulțimilor A și B ;
 - fiecare mulțime are câte două elemente;
 - dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.
- 39** Se dă mulțimea A , formată din numere naturale, cu proprietățile:
- dacă $x \in A$, atunci $3x + 2 \in A$;
 - dacă $x^2 + 1 \in A$, atunci $x \in A$;
 - $1 \in A$.
- Arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii A .
- 40** Se dă mulțimea A , formată din numere naturale, cu proprietățile:
- dacă $x \in A$, atunci $3 \cdot x \in A$ și $6 \cdot x + 4 \in A$;
 - dacă $4 \cdot x + 2 \in A$, atunci $x \in A$;
 - $11 \in A$.
- Arătați că $2010 \in A$.