Mihai Monea
Steluța Monea
Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2023

Matematică

M_șt-nat
M_tehnologic

Teme recapitulative
40 de teste, după modelul M.E.
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Mioara Benza, Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Bacalaureat 2023 : matematică M_șt-nat, M_tehnologic : teme recapitulative : 40 de teste, după modelul M.E. (10 teste fără soluții) /
Mihai Monea, Ioan Șerdean, Steluța Monea, Adrian Zanoschi. - Pitești : Paralela 45, 2022
Conține bibliografie
ISBN 978-973-47-3697-3

I. Monea, Mihai
II. Șerdean, Ioan
III. Monea, Steluța
IV. Zanoschi, Adrian

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Cuvânt-înainte

Examenul de Bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală şi personală, având menirea de a certifica pregătirea ştiinţifică şi competenţele dobândite în liceu, dar şi de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecinţă, performanţa la acest examen, şi îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conţinuturilor, cât şi pentru fixare, sistematizare, recapitulare.

Cartea se adresează celor care pregătesc bacalaureatul la matematică, de tip *M_şt-nat* şi *M_tehnologic*. Lucrarea de faţă îşi propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigenţelor disciplinei şi ale probelor de examen.

Trebuie menţionat că această carte este adaptată la forma de organizare a probei de matematică din cadrul examenului menţionat. Elevii profilului ştiinţe ale naturii şi cei ai profilului tehnologic au o programă de examen asemănătoare pentru clasele a XI-a – a XII-a, dar cu diferenţe importante de conţinut pentru clasele a IX-a – a X-a. De aceea, am evidenţiat problemele şi testele specifice doar elevilor de la profilul ştiinţe ale naturii. Astfel, acestea sunt marcate cu semnul „*”.

Cartea are un pronunţat caracter metodic, fiecare paragraf având trei componente: una de iniţiere, una de consolidare şi una de evaluare. Primele patru capitole sunt rezervate antrenamentului specific pentru examen. Problemele sunt grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată în variantele examenelor din anii precedenţi, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Aşadar, un elev îşi poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete şi găseşte în carte un număr suficient de exerciţii cu ajutorul cărora să-şi atingă scopul. Problemele din partea de iniţiere sunt însoţite doar de răspunsuri. Problemele din partea de consolidare sunt însoţite de indicaţii şi răspunsuri, dar şi de soluţii detaliate acolo unde acest lucru se impune. Problemele din partea de evaluare nu au răspunsuri decât la testul de tip grilă.

Capitolul al cincilea este rezervat testelor. Acestea au o structură specifică examenului de Bacalaureat. Testele sunt dispuse pe două categorii. Prima categorie este formată dintr-un set de 30 de teste propuse, după modelul subiectelor date la examenul de bacalaureat din ultimii ani şi însoţite de rezolvări complete. Testele din a doua categorie sunt pentru autotestare şi nu sunt însoţite de rezolvări.

Lucrarea poate fi folosită şi pentru învăţarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiţii reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor şi elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârşitul anului şcolar.

Autorii

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicaţie de tipul: *Dacă p (ipoteza) atunci q (concluzia)*, putem presupune concluzia p ca fiind falsă şi apoi împreună cu ipoteza p construim un raţionament care conduce la contradicţie.
Metoda inducţiei matematice: Se aplică pentru propoziţii de forma: *Demonstraţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, are loc $p(n)$*, unde $p(n)$ reprezintă un enunţ care depinde de variabila n. Se verifică valoarea de adevăr a propoziţiei obţinute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziţia obţinută în cazul $n = k$ şi se demonstrează valoarea de adevăr a propoziţiei obţinute pentru $n = k + 1$.

1.1.2. Mulțimi și cardinale

Teoremă: Orice mulţime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulţimi.
Definiţie: Pentru o mulţime finită A, numim **cardinalul** său şi notăm $\text{Card}(A)$ ca fiind numărul său de elemente.
Proprietăţi: Sunt adevărate următoarele proprietăţi:
P1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$;
P2. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B)$.

1.1.3. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiţie: Numim **modulul** unui număr real x şi notăm $|x|$ ca fiind distanţa de la originea axelor la poziţia numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

P1. $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$; **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

P4. $|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c;\ c)$; **P5.** $|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -c) \cup (c;\ \infty)$;

P6. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$; **P7.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

P8. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^*$; **P9.** $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|,\ \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$.

Definiție: Numim **parte întreagă** a numărului real x și notăm $[x]$ ca fiind cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x.

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k,\ k+1)$.

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x și notăm $\{x\}$ ca fiind diferența dintre număr și partea sa întreagă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $\{x\} \in [0,1)$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A = \{a, b, c\}$.

I2. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.

I3. Reuniunea a două mulțimi, cu câte 20 de elemente fiecare, are 31 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.

I4. Demonstrați că $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \in \mathbb{N}$.

I5. Arătați că numărul $a = (-5) \cdot \left[0,(4) + 0,1(5)\right]$ este întreg.

I6. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă avem egalitatea de intervale $[a - b;\ a + b] = [1;\ 7]$.

I7. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați cardinalul mulțimii:
$B = \{x = (a-1)(a-2)(a-3) + 4 \mid a \in A\}$.

I8. Determinați intersecția mulțimilor $A = (1,\ 5)$ și $B = [3,\ 11]$.

I9. Determinați partea întreagă a numărului $b = 2{,}13 + 1{,}88$.

I10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 2| = 5$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui A care îl conțin pe d.

C2. O mulţime admite 31 de submulţimi nevide. Determinaţi numărul de elemente ale acestei mulţimi.

C3. Două mulţimi, cu câte 28 de elemente fiecare, au 11 elemente comune. Determinaţi numărul de elemente ale reuniunii lor.

C4. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinaţi numărul de submulţimi care conţin simultan pe 1 şi pe 3.

C5. Demonstraţi că $\sqrt{4}+\frac{1}{3}+2,(6)=5$.

C6. Determinaţi elementele mulţimii $\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{6}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

C7. Determinaţi toate valorile reale ale numărului $x\in\mathbb{R}$ pentru care:

$$2 \in (4x-2;\ 2x+6).$$

C8. Elevii unei clase sunt angrenaţi fiecare într-o activitate sportivă, 12 la volei, iar 25 la fotbal. Ştiind că 7 dintre ei practică ambele sporturi, determinaţi numărul de elevi ai clasei.

C9. Determinaţi cel mai mare număr natural al mulţimii $A\setminus B$, dacă $A = [5, 6]$ şi $B = [5, 10]$.

C10. Determinaţi câte elemente întregi conţine mulţimea $A\cup B$, unde $A = (-2, 3)$ şi $B = (0, 5)$.

C11. Ordonaţi crescător numerele $a = 2,010$, $b = 2,0(10)$ şi $c = 2,(010)$.

C12. Determinaţi cardinalul mulţimii $A = \left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{2}{x-3}\in\mathbb{Z}\right\}$.

C13. Fie numărul raţional $\frac{11}{9}=\overline{1,a_1a_2a_3...a_n...}$. Calculaţi produsul $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10}$.

C14. Fie numărul raţional $\frac{13}{6}=\overline{2,a_1a_2a_3...a_n...}$. De câte ori apare cifra 3 printre cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$?

C15. Se consideră numărul raţional $\frac{23}{15}=\overline{1,a_1a_2a_3...a_n...}$. Calculaţi suma:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}.$$

C16. Fie mulţimile $A=(-3;4]$ şi $B=(1;5]$. Determinaţi cardinalul mulţimii:

$$(A\setminus B)\cap\mathbb{Z}.$$

C17. Fie numerele $a=\sqrt{98}-\sqrt{32}-\sqrt{8}$ şi $b=\sqrt{162}+\sqrt{18}+\sqrt{72}+\sqrt{72}$. Calculaţi media geometrică a numerelor a şi b.

C18. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $|1-2x|=|x+4|$.

C19. Demonstraţi că $\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|$ este număr natural.

C20. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $|3x-2|=11$.

C21*. Calculaţi $\left[\frac{17}{5}\right]+\left\{\frac{11}{6}\right\}$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

C22*. Determinaţi partea întreagă a numărului $a=\sqrt{17}$.

C23*. Determinaţi partea fracţionară a numărului $b=\sqrt{25}+\sqrt{26}$.

C24*. Se consideră numărul $A=\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$. Demonstraţi că $A\in\mathbb{N}$.

C25*. Arătaţi că $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este număr natural.

C26*. Demonstraţi că $\left[\sqrt{3}+\sqrt{25}\right]=\left[\sqrt{4}+\sqrt{19}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

C27*. Demonstraţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

C28*. Demonstraţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

C29*. Demonstraţi că numărul $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este iraţional.

C30*. Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n, fracţia $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

1.4. Teste de verificare

Testul 1

1. Determinaţi elementele mulţimii $A \cap B$ dacă $A = (2003,\ 2015)$ şi $B = (2014,\ 2016)$.

2. Calculaţi suma $|-3| + |-5| \cdot 2$.

3. Demonstraţi că $\sqrt{4} + \sqrt{36} = \sqrt{64}$.

4. Câte submulţimi ale mulţimii $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ conţin doar numere impare?

5. Ordonaţi crescător numerele $a = \sqrt{4} - 4$, $b = \sqrt{9} - 9$ şi $c = \sqrt{16} - 16$.

6. Demonstraţi că numărul $A = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{5}\right)^2$ este natural.

Testul 2*

1. Determinaţi cel mai mic număr întreg al mulţimii $A \cap B$ dacă $A = (2010, 2016)$ şi $B = (2013, 2020)$.

2. Determinaţi partea întreagă a numărului $x = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left||2x-1| - 3\right| = 5$.

4. Comparaţi numerele $a = 5\sqrt{3}$ şi $b = 3\sqrt{7}$.

5. Fie numărul raţional $\frac{5}{4} = \overline{1,a_1a_2a_3...a_n...}$. Calculaţi suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014}$.

6. Demonstraţi prin inducţie matematică că egalitatea $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Testul 3

1. Rezultatul calculului următor $1,2^2 - 1,1 \cdot 1,3$ este:

A. 0,1; **B.** –0,1; **C.** 0,01; **D.** –0,01.

2. Partea întreagă a numărului $x = -\sqrt{13}$ este egală cu:

A. –3; **B.** –4; **C.** 3; **D.** 4.

3. Fie $A = (5;11)$ şi $B = [7;12]$. Cel mai mare număr al mulţimii $A \cap B$ este:

A. 9; **B.** 12; **C.** 11; **D.** 10.

4. Numărul de elemente al mulţimii $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x = -\frac{3}{2n-1},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ este:

A. 2; **B.** 4; **C.** 0; **D.** 1.

5. Valoarea numărului natural a din relaţia $0,5 + 0,(3) + 1,1(6) = \frac{a}{2020}$

A. 2020; **B.** 2; **C.** 1010; **D.** 4040.

Clasa a X-a

1. Numere reale

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Radicali

Definiţie: Numim **radical** de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, din numărul pozitiv a şi notăm $\sqrt[n]{a}$ ca fiind acel număr pozitiv x unic cu proprietatea $x^n = a$.

Observaţie: Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, dacă $\sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, atunci $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proprietăţile radicalului: Următoarele relaţii sunt adevărate pentru orice a, $b \geq 0$ şi m, $n \in \mathbb{N}$, m, $n \geq 2$.

P1. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$;

P2. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$;

P3. $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}$;

P4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Observaţie: Dacă n este impar, putem calcula $\sqrt[n]{x}$ şi dacă $x < 0$. În aceste condiţii $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

Observaţie: Avem $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, dar $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ este impar} \\ |x|, & n \text{ este par} \end{cases}$.

1.1.2. Puteri cu exponent real

Observaţie: Noţiunea de ridicare la putere se poate generaliza astfel:

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $x \geq 0$, m, $n \in \mathbb{N}^*$.

Proprietăţile ridicării la putere: Pentru orice $x, y > 0$ şi orice p, $r \in \mathbb{R}$, au loc relaţiile:

P1. $x^p x^q = x^{p+q}$;

P2. $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$;

P3. $\left(x^p\right)^q = x^{pq}$;

P4. $(xy)^p = x^p y^p$.

1.1.3. Logaritmi

Definiție. Fie $a, b > 0,\ a \neq 1$. Soluția (unică) a ecuației $a^x = b$ se numește **logaritm în baza *a* din *b*** și se notează cu $\log_a b$.

Proprietățile logaritmului: Logaritmul are următoarele proprietăți valabile pentru orice $a,\ b,\ x,\ y > 0,\ a,\ b \neq 1$:

P1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

P2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

P3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,\ \alpha \in \mathbb{R}$;

P4. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Observație: Dacă $a,\ b \in \mathbb{N}$ sunt numere prime diferite, atunci $\log_a b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Calculați $(-1)^5 + (-2)^4 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5)$.

I2. Calculați $(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{100}$.

I3. Calculați $8^{\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$.

I4. Calculați $\sqrt[3]{125} + \sqrt{16} + \sqrt[3]{-27}$.

I5. Calculați $\log_{11} 11 + \log_7 \dfrac{1}{7}$.

I6. Calculați $\log_3 81 + \log_5 25 - \lg 100000$.

I7. Ordonați crescător numerele $a = -\sqrt[3]{27}$, $b = \log_2 \dfrac{1}{16}$, $c = -2$.

I8. Demonstrați că $\log_4 64 + \sqrt[3]{1000} = \sqrt{16} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$.

I9. Demonstrați că $\log_{11} 121 < \sqrt[3]{27}$.

I10. Dacă $\log_2 3 = a$, demonstrați că $\log_2 6 = 1 + a$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Calculați $\sqrt{18} - \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{72}$.

C2. Arătați că $2\sqrt{14} - \sqrt{\dfrac{7}{2}} - 5\sqrt{\dfrac{8}{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

C3. Demonstrați că $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250}$.

C4. Demonstrați egalitatea $\sqrt[3]{\sqrt{729}} - \sqrt{\sqrt[3]{64}} = 1$.

C5. Dacă lg 3 = a, demonstraţi că lg 90 = $2a + 1$.

C6. Demonstraţi că $\log_2 12 + \log_2 14 - \log_2 21 = 3$.

C7. Arătaţi că numărul $a = \log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.

C8. Demonstraţi că $\lg\frac{2}{1} + \lg\frac{3}{2} + ... + \lg\frac{10}{9} \in \mathbb{N}$.

C9. Demonstraţi că $1331^{\frac{2}{3}} \in \mathbb{N}$.

C10. Comparaţi numerele $a = 2^{33}$ şi $b = 3^{22}$.

C11. Comparaţi numerele $3\sqrt{2008}$ şi $2008\sqrt{3}$.

C12. Calculaţi $b - a$, unde $a = \log_2 3$ şi $b = \log_2 6$.

C13. Calculaţi lg 12 + lg 15 – lg 18.

C14. Demonstraţi că $\log_4 9 = \log_8 27$.

C15. Demonstraţi că $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = 3$.

C16. Demonstraţi că numărul $a = \log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este raţional.

C17. Demonstraţi că numărul $\log_2(5+\sqrt{7}) + \log_2(5-\sqrt{7}) - 2\log_2 3$ este întreg.

C18. Demonstraţi că $\log_{2\sqrt{2}} 3\sqrt{3} = \log_2 3$.

C19. Comparaţi numerele $\log_5 2007$ şi 4.

C20. Demonstraţi că $\log_8 512 + \sqrt[3]{512} > \sqrt{121} - \log_{11} 121$.

C21*. Se consideră numerele $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ şi $b = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Arătaţi că $\frac{b}{a} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

C22*. Determinaţi $a, b \in \mathbb{Q}$, ştiind că $(1+\sqrt{2})^2 = a + b\sqrt{2}$.

C23*. Arătaţi că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$.

C24*. Demonstraţi că $\sqrt{3} + \sqrt{9} < \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

C25*. Demonstraţi că $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

C26*. Demonstraţi că $2 \in (\log_3 4, \sqrt{5})$.

C27*. Demonstraţi că $\log_3 5 \cdot \log_5 9 < \sqrt[3]{9}$.

C28*. Demonstraţi că $100^{\lg 2} + \sqrt[3]{-27} > 0$.

C29*. Dacă $\log_3 2 = a$, demonstraţi că $\log_{12} 18 = \frac{a+2}{2a+1}$.

C30*. Demonstraţi că $\log_3 7 > \log_7 3$.

1.4. TESTE DE VERIFICARE

Testul 1

1. Demonstraţi că $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-1000}+\left(\sqrt{3}\right)^2=0$.

2. Demonstraţi că numărul $a=\dfrac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{\sqrt{32}-\sqrt{8}}$ este natural.

3. Demonstraţi că $\lg 20+\lg 50=3$.

4. Demonstraţi că $\log_3 5+\log_3 7<\log_3 72-\log_3 2$.

5. Ordonaţi crescător numerele $a=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$, $b=\sqrt[3]{-125}$ şi $c=\lg\dfrac{1}{1000}$.

6. Demonstraţi că $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{3}{2}=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{2}{3}$.

Testul 2*

1. Demonstraţi că $\sqrt[3]{-216}+\sqrt{144}=\log_3 729$.

2. Demonstraţi că $\dfrac{1}{\log_3 2}+\dfrac{2}{\log_9 4}-\dfrac{3}{\log_{27} 8}=0$.

3. Demonstraţi că numerele a = $10^{\lg 7}$ şi b = $\sqrt[3]{343}$ sunt egale.

4. Arătaţi că numărul a = $\log_{25} 100\cdot\log_{16} 25-2\log_{16} 5$ este raţional.

5. Demonstraţi că $\log_{11} 3\cdot\log_7 5=\log_7 3\cdot\log_{11} 5$.

6. Demonstraţi că $\sqrt{10}+\sqrt{12}<7$.

Testul 3

1. Cel mai mic număr natural n care verifică relaţia $\sqrt[3]{31}<n$ este:

A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

2. Fie $a=\log_3 63-\log_3 7$. Atunci:

A. $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **B.** $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$; **C.** $a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; **D.** $a\in\mathbb{N}$.

3. Valoarea numărului raţional x din egalitatea $2^x=4^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{5}{9}}$ este:

A. $\dfrac{1}{3}$; **B.** $\dfrac{5}{3}$; **C.** $\dfrac{7}{3}$; **D.** $\dfrac{8}{3}$.

4. Dintre numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\log_3 10$ şi $\log_4 15$ este mai mare decât 2 numărul:

A. $\sqrt{2}$; **B.** $\sqrt[3]{3}$; **C.** $\log_3 10$; **D.** $\log_4 15$.

5. Numărul $512^{\frac{4}{9}}$ aparţine mulţimii:

A. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **B.** $\mathbb{N}$; **C.** $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$; **D.** $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$.

6. Dacă $\log_3 5 = a$, atunci $\log_{15} 45$ este egal cu:

A. $\frac{2+a}{1+2a}$; **B.** $\frac{2+a}{1+a}$; **C.** $\frac{1+2a}{2+a}$; **D.** $\frac{1+2a}{2+2a}$.

2. Funcții și ecuații

2.1. NOȚIUNI TEORETICE

2.1.1. Funcții bijective

Definiţie: Funcţia $f : A \to B$ se numeşte:

- **funcţie injectivă**, dacă pentru orice $u, v \in A$, cu $u \neq v$, avem $f(u) \neq f(v)$;
- **funcţie surjectivă**, dacă pentru orice $w \in B$ există $u \in A$, astfel încât $f(u) = w$;
- **funcţie bijectivă**, dacă este injectivă şi surjectivă.

Proprietăţi ale funcţiilor injective:

P1. Funcţia $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă pentru $u, v \in A$, cu $f(u) = f(v)$, avem $u = v$;

P2. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ strict monotonă este injectivă.

Proprietăţi ale funcţiilor surjective: Funcţia $f : A \to B$ este surjectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} f = B$.

Proprietăţi ale funcţiilor bijective: Funcţia $f : A \to B$ este bijectivă dacă şi numai dacă, pentru orice $w \in B$, ecuaţia $f(x) = w$ admite o singură soluţie $x \in A$.

2.1.2. Funcții inversabile

Definiţie: Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **funcţie inversabilă** dacă există o funcţie $g : B \to A$, astfel încât $(g \circ f)(x) = x$, pentru orice $x \in A$, şi $(f \circ g)(y) = y$, pentru orice $y \in B$.

Observaţii:

- Dacă există, funcţia g se numeşte inversa funcţiei f şi se notează f^{-1}.
- Avem relaţia $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, cu $x \in A$ şi $y \in B$.

Teoremă: O funcţie este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

Clasa a XI-a

1. Matrice

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Generalități

Forma generală: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, unde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ se numesc **coeficienţi**.

Notăm cu $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane şi coeficienţi în mulţimea *K*.

Dacă $m=n$, matricele se numesc **pătratice** şi avem $\mathcal{M}_{n\times n}(K)\overset{\text{not}}{=}\mathcal{M}_n(K)$.

Cazuri particulare: $O_n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – **matricea nulă**, $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – **matricea unitate**.

Fiind dată matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, **transpusa** sa este matricea

$${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times m}(K).$$

1.1.2. Relații între matrice și operații

Se consideră matricele:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K) \text{ şi } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K).$$

Egalitatea a două matrice:

Avem $A=B$ dacă $a_{ij}=b_{ij}$, pentru orice $i\in\{1, 2, ..., m\}$ şi $j\in\{1, 2, ..., n\}$.

Dacă $A=B$ şi $B=C$, atunci $A=C$.

Adunarea matricelor:

$$\text{Avem } A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K).$$

Proprietăţile adunării matricelor: Adunarea matricelor este o operaţie:

- asociativă, adică $(A+B)+C=A+(B+C)$, pentru orice $A, B, C\in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$;
- care admite element neutru, adică $A+O_n=O_n+A=A$, pentru orice $A\in \mathcal{M}_n(K)$.

Înmulţirea matricelor cu un scalar:

$$\text{Avem } \alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K), \text{ pentru orice } \alpha\in K \text{ şi } A\in \mathcal{M}_{m\times n}(K).$$

Proprietăţi ale înmulţirii matricelor cu un scalar:

Sunt adevărate relaţiile $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ şi $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, pentru orice $\alpha, \beta\in K$ şi $A, B\in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Înmulţirea matricelor:

Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ şi $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$, atunci

$$AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{m\times p}(K),$$ unde $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$, pentru orice $i\in\{1,\ 2,\ \dots,\ m\}$ şi $j\in\{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$.

Proprietăţile înmulţirii matricelor: Operaţia de înmulţire a matricelor:
- este asociativă;
- în general **nu** este comutativă;
- operaţia de înmulţire a matricelor pătratice admite element neutru matricea unitate I_n;
- este distributivă în raport cu adunarea matricelor.

Puterile unei matrice pătratice:
Fiind dată o matrice $A\in\mathcal{M}_n(K)$, atunci $A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\dots\cdot A}_{k}$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

Propoziţie: Sunt adevărate relaţiile $A^kA^l=A^lA^k=A^{k+l}$ şi $\left(A^k\right)^l=A^{kl}$ pentru orice $A\in\mathcal{M}_n(K)$ şi $k,\ l\in\mathbb{N}^*$.

1.1.3. Urma unei matrice pătratice

Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(K)$, atunci **urma** sa este $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$.

Proprietăţi: Pentru orice $A,\ B\in\mathcal{M}_n(K)$ şi $\alpha\in K$, avem:
T1. $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$; **T2.** $Tr(\alpha A)=\alpha Tr(A)$; **T3.** $Tr(AB)=Tr(BA)$.

1.2. PROBLEME DE INIȚIERE

I1. Determinaţi valorile numerelor reale a, b, pentru care matricele:
$A=\begin{pmatrix} 2a+3 & 4 \\ 3b-5 & 7 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$ sunt egale.

I2. Calculaţi suma matricelor $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

I3. Fiind dată matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, determinaţi matricea $-3A$.

I4. Determinaţi produsul matricelor $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

I5. Considerăm matricea $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculaţi B^2.

I6. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $A^2 - 7A = 2I_2$.

I7. Pentru matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ demonstraţi că $Tr(A)=Tr(B)$.

I8. Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinaţi $x\in\mathbb{R}$, pentru care $A^2 = xA$.

I9. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $AB = BA$.

I10. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinaţi cel mai mic număr natural n, pentru care $A^n = O_2$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real a, matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2a+5 \\ 3 & 3a+2 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ nu pot fi egale.

C2. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că:

$(2x + 2)A - (3x + 3)B = O_2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

C3. Fie matricea $A_k=\begin{pmatrix} 2^k & 2k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, unde $k \in \mathbb{N}$. Determinaţi suma elementelor matricei $B = A_1 + A_2 + ... + A_5$.

C4. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $AB = O_2$.

C5. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ştiind că $2X - AB = A$, calculaţi $a + b + c + d$.

C6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $A^3 = 6I_3$.

C7. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Arătaţi că există $d \in \mathbb{R}$, astfel încât $A^2 = dA$.

C8. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculaţi suma $A + A^2 + A^3 + ... + A^{20}$.

C9. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că suma elementelor matricei A^4 este număr natural impar.

C10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $A^{2014} \neq I_2$.

C11. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $A^{2012} - A^{2011} = O_2$.

C12. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi matricea B cu proprietatea $Tr(B) = Tr(A)$.

C13. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinaţi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, astfel încât $AB = I_2$.

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Legi de compoziție

Fie G o mulţime nevidă şi o lege „$*$”. Legea „$*$”:
- este **lege de compoziţie** pe G dacă $x*y\in G$ pentru orice $x, y\in G$ (se mai spune că mulţimea G este **parte stabilă** în raport cu legea „$*$”);
- este **comutativă** dacă $x*y=y*x$ pentru orice $x, y\in G$;
- este **asociativă** dacă $x*(y*z)=(x*y)*z$ pentru orice $x, y, z\in G$;
- admite **element neutru** dacă există un element $u\in G$, astfel încât $x*u=u*x=x$ pentru orice $x\in G$;
- este **simetrizabilă** dacă pentru orice $x\in G$ există un element $x'\in G$, astfel încât $x*x'=x'*x=u$.

Observaţie: Elementul x' se numeşte **simetricul** lui x în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

1.1.2. Mulțimea claselor de resturi

Fie mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Pentru orice $r\in\{0, 1, 2, ..., n-1\}$, definim mulţimea $\hat{r}=\{z\in\mathbb{Z} \mid \text{restul împărţirii lui } z \text{ la } n \text{ este egal cu } r\}$.

Mulţimea $\mathbb{Z}_n=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ se numeşte mulţimea **claselor de resturi modulo *n***.

Definim operaţiile:
- $\hat{x}+\hat{y}=\hat{z}$, unde z este restul împărţirii numărului $x+y$ la n;
- $\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{t}$, unde t este restul împărţirii numărului xy la n.

Proprietăţi:
- adunarea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziţie asociativă şi comutativă;
- adunarea admite element neutru elementul $\hat{0}$;
- orice element $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$ este **simetrizabil**, simetricul său fiind elementul $\widehat{n-x}$, care se mai notează $-\hat{x}$;

● înmulţirea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziţie comutativă, asociativă şi distributivă în raport cu adunarea;
● înmulţirea admite element neutru elementul $\hat{1}$;
● evident, $\hat{0}\cdot\hat{x}=\hat{0}$ pentru orice $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$;
● dacă n este număr prim, atunci din $\hat{x}\hat{y}=\hat{0}$ obţinem $\hat{x}=\hat{0}$ sau $\hat{y}=\hat{0}$; dacă n nu este prim, nu este adevărat întotdeauna (de exemplu, în $\mathbb{Z}_6$ avem $\hat{3}\cdot\hat{4}=\hat{0}$);
● un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă există $\hat{y}$ astfel încât $\hat{x}\hat{y}=\hat{1}$; atunci $\hat{y}$ este inversul lui $\hat{x}$ şi se notează $\hat{x}^{-1}$;
● un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă şi numai dacă numerele x şi n admit divizor comun doar pe 1.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Calculaţi $4\circ 9$.

I2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstraţi că această lege este comutativă.

I3. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstraţi că această lege este asociativă.

I4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstraţi că 3 este elementul neutru al acestei legi.

I5. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Ştiind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinaţi simetricul elementului $x=7$ în raport cu această lege.

I6. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x\circ y=x+y-3$. Determinaţi valoarea numărului real x, pentru care $x\circ x\circ x=21$.

I7. În $\mathbb{Z}_6$, calculaţi $\hat{2}+\hat{5}$.

I8. În $\mathbb{Z}_6$, calculaţi $\hat{2}\cdot\hat{5}$.

I9. Considerăm mulţimea $C=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$. Demonstraţi că, oricare ar fi $X,\ Y\in C$, avem $X+Y\in C$.

I10. Considerăm mulţimea $C=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$. Demonstraţi că, oricare ar fi $X,\ Y\in C$, avem $X\cdot Y\in C$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Se consideră operaţia „$\perp$” definită prin $x \perp y = x^y + y^x$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$. Calculaţi $2 \perp 3$.

C2. Pe $\mathbb{R}$ definim operaţia „$*$” prin $x * y = xy - 4x - 4y + 20$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi $t \in \mathbb{R}$, ştiind că $t * t = 4$.

C3. Pe $\mathbb{R}$ definim operaţia „$*$” prin relaţia $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $z * 3 = 3 * z = z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.

C4. Fie mulţimea $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Demonstraţi că, oricare ar fi $x, y \in A$, avem $x + y \in A$.

C5. Pe mulţimea $G = (-4, \infty)$ definim operaţia „$\circ$” prin $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in G$. Demonstraţi că, oricare ar fi $x, y \in G$, avem $x \circ y \in G$.

C6. Considerăm operaţia „$\bullet$” definită prin $x \bullet y = x + y - 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

C7. Demonstraţi că operaţia „$*$”, definită prin $x * y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, este asociativă.

C8. Fie mulţimea $M = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Demonstraţi că mulţimea M este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor întregi.

C9. Determinaţi elementul neutru al legii „$\perp$” definită prin $x \perp y = \sqrt{x^2 + y^2}$, pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.

C10. Fie operaţia „$\perp$” definită prin $x \perp y = \dfrac{x + y}{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că această operaţie este comutativă, dar nu este asociativă.

C11. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$*$” definită prin $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Ştiind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinaţi elementele simetrizabile.

C12. Determinaţi valoarea numărului real a, ştiind că operaţia „$*$” definită prin $x * y = x + y - a$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, admite pe 2 ca element neutru.

C13. Fie operaţia „$*$” definită prin $x * y = xy - 3x - 3y + a$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi numărul real a, ştiind că operaţia „$*$” este asociativă.

C14. Fie mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstraţi că înmulţirea matricelor este lege de compoziţie pe mulţimea G.

C15. Fie mulţimea $A = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\} \subset \mathbb{Z}_8$. Demonstraţi că mulţimea A este parte stabilă în raport cu înmulţirea din $\mathbb{Z}_8$.

C16*. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\perp$" prin $x \perp y = (x-2)(y-2)+2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi valoarea numărului real x care verifică relaţia $x \perp x \perp x = 10$.

C17*. Fie mulţimea $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a,\ b \in \mathbb{Z}\}$. Demonstraţi că mulţimea A este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor reale.

C18*. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\perp$" prin $x \perp y = (x-2)(y-2)+2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Ştiind că operaţia este asociativă, calculaţi $10 \perp 9 \perp 8 \perp \ldots \perp 1 \perp 0$.

C19*. Demonstraţi că operaţia „$*$" este asociativă, unde $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 1}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

C20*. Pe $\mathbb{R}$ definim operaţia „$*$" prin relaţia $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Daţi exemplu de două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, pentru care $a * b \in \mathbb{Z}$.

1.4. Teste de verificare

Testul 1

1. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că această lege este asociativă.

2. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi elementul neutru al acestei legi.

3. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că, oricare ar fi $x, y \in (-2, \infty)$, avem $x \circ y \in (-2. \infty)$.

4. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi toate valorile reale ale numărului a pentru care $a \circ a = 7$.

5. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi un element $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x \circ c = c \circ x = c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

6. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Calculaţi: $(-5) \circ (-4) \circ (-3) \circ (-2) \circ (-1) \circ 0$.

Testul 2*

1. Considerăm legea „$*$” definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 8}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.

2. Considerăm legea „$*$” definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 8}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați elementul neutru al acestei legi.

3. Considerăm legea „$*$” definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 8}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că orice $x \in \mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu legea „$*$”.

4. Considerăm legea „$*$” definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 8}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați toate valorile reale ale numărului a care verifică egalitatea $a * a * a = \sqrt[3]{-13}$.

5. Considerăm legea „$\circ$” definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Știind că legea admite element neutru pe -1, determinați elementele simetrizabile ale acestei legi.

6. Fie $G = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că această mulțime este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor întregi.

Testul 3

1. Pe mulțimea $A = (1; \infty)$ definim legea de compoziție „$*$” prin $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Această lege este:

A. comutativă și asociativă; **B.** comutativă și neasociativă;
C. necomutativă și asociativă; **D.** necomutativă și neasociativă.

2. Pe mulțimea $A = (1; \infty)$ definim legea de compoziție „$*$” prin $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Despre elementul neutru putem spune că**:**

A. este egal cu 1; **B.** nu există; **C.** este egal cu 2; **D.** este egal cu 3.

3. Fie $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ nu e divizibil cu } 4\}$. Care dintre operațiile următoare definesc o lege de compoziție pe B?

A. adunarea; **B.** scăderea; **C.** înmulțirea; **D.** împărțirea.

4. Pe $\mathbb{Z}$, definim legea „$\vartriangle$” prin $x \vartriangle y = x + y - 8$. Știind că elementul neutru este egal cu 8, care este simetricul lui 3 în raport cu acestă lege?

A. –3; **B.** –8; **C.** 3; **D.** 13.

Bibliografie

1. Brânzei D., Zanoschi A. – *Probleme cu vectori*, Editura Paralela 45, Piteşti, 1999

2. Chiriac V., Chiriac M., Cozma D., Şova A. – *Probleme de matematică, fizică, chimie, date la concursul de admitere în treapta a II-a de liceu*, Editura Academiei, Bucureşti, 1987

3. Demidovich B. *et al.* – *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1976

4. Dragomir L., Dragomir A., Bădescu O. – *Probleme de matematică pentru clasa a IX-a*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2019

5. Dragomir L., Dragomir A., Bădescu O. – *Probleme de matematică pentru clasa a X-a*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2019

6. Ganga M. – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XI-a,* Editura Mathpress, 1997

8. Năstăsescu C., Niţă C., Brandiburu M., Joiţă D. – *Culegere de probleme pentru liceu*, Editura Rotech Pro, 1997

9. Panaitopol M.E., Radu G., *Matematică – culegere de probleme, clasa a XI-a: subiecte date la admiterea în învăţământul superior şi bacalaureat,* Editura Europontic, Cluj-Napoca

10. Savu I. – *Bacalaureat la matematică 2008*, Books Unlimited Publishing, 2008

11. Stănăşilă O., Popescu I., Cornea F. (coord.) – *Culegere de probleme rezolvate pentru admiterea în învăţământul superior*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989

12. Zanoschi A., Iurea G., Popa G., Răducanu P., Şerdean I. – *Bacalaureat 2021. Matematică M_mate-info*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2020

13. *** – Subiectele şi variantele de bacalaureat publicate de ministerul educaţiei între anii 1998 şi 2017

Cuprins

Clasa a XII-a